第26卷 第5期 2009年10月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 26 No. 5 Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0906-11

二维非线性对流扩散方程的特征混合有限元两重网格算法*

秦新强[1]， 党发宁[2]， 龚春琼[1]， 张爱君[1]

(1- 西安理工大学理学院，西安 710048; 2- 西安理工大学水利水电学院，西安 710048)

摘 要: 本文构造了求解非线性对流扩散方程的两重网格算法，该算法首先是在步长为H的粗网格上求解一个非线性问题，再利用粗网格解得到一个线性问题并在细网格上求解一个线性问题。理论分析与数值计算表明，该算法不仅消除了数值振荡现象，还极大地提高了非线性对流扩散方程的计算效率。

关键词: 对流扩散方程；特征混合有限元；两重网格法；收敛性

分类号: **AMS**(2000) 65N30　　**中图分类号**: O241.82　　**文献标识码**: A

1 引言

本文考虑用特征混合有限元求解非线性对流扩散方程

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{b}\cdot\nabla u-\nabla\cdot(a(u)\nabla u)=f(u), & (x,t)\in\Omega\times J,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times J,\end{cases}\tag{1}$$

其中$\Omega\subset\mathbf{R}^2$为具有$C^1$边界的有界区域$\partial\Omega$，而且$J=(0,T]$，$T>0$。$c=c(x,t)$，$\mathbf{b}=(b_1(x,t),b_2(x,t))$，$a(u)=a(u,x,t)$，$f(u)=f(u,x,t)$。

对于$p\geq 1$，$L^p(\Omega)$为定义在Ω上的标准Banach空间，且具有范数$\|\cdot\|_p$。$W^{m,p}(\Omega)$为具有范数$\|\cdot\|_{m,p}$的Sobolev空间。设$(\cdot,\cdot)$表示$L^2(\Omega)$中的内积，$W=L^2(\Omega)$，$V=H(\text{div};\Omega)=\{\mathbf{v}\in(L^2(\Omega))^2:\nabla\cdot\mathbf{v}\in L^2(\Omega)\}$。并设(1)满足以下条件:

(a) $0<c_*\leq c(x,t)\leq c^*<+\infty$，$0<a_*\leq a(u)\leq a^*<+\infty$;

(b) $|\mathbf{b}/c|+|\nabla\cdot(\mathbf{b}/c)|\leq C_1$;

(c) $\left|\dfrac{\partial f(s)}{\partial s}\right|+\left|\dfrac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2}\right|\leq C_2$,

其中c_*、c^*、a_*、a^*、C_1及C_2都是正常数。

方程(1)具有广泛的工程应用背景[1-6]，它可以描述质量、热量的输运过程及反映扩散过程等众多物理现象，构造稳定、快速实用的数值方法，对于实际问题的解决有着重要的理论和实用价值。众所周知，用标准有限元和有限差分法求解对流占优扩散方程经常会产生非物理震

收稿日期: 2007-08-30. **作者简介**: 秦新强(1962年7月生)，男，博士，教授. 研究方向：微分方程数值解.
***基金项目**: 国家自然科学基金(50679073)；陕西省教育厅自然科学研究项目(08JK399)；西安理工大学校基金(108-210711; 108-210713).

荡或者数值扩散[7,8]，因此克服这一现象的许多数值方法便应运而生。混合有限元法最初是为解决固体力学问题而提出[9,10]，现在已应用于流体力学和弹性力学的诸多方面。该方法受到普遍重视，是因为不仅能够求出未知变量的数值解，同时还能求出未知变量的导数值[11,12]。两重网格算法是近几年才新出现的求解非线性方程的高效算法。文 [13] 阐述了如何通过收敛的粗网格解及泰勒展式获得细网格的 Galerkin 有限元解，文 [14-16] 已将此方法用于相关问题的求解，并取得理想的加速收敛结果。

本文针对非线性对流扩散方程构造了特征混合有限元两重网格算法，该算法除了体现特征线法和混合有限元法的特点以外，最重要的是可以加快非线性对流扩散方程的收敛速度，是一种稳定、高效的数值算法。

2 两重网格算法的构造

令 $\psi(x,t)=\sqrt{c^2(x,t)+|\mathbf{b}(x,t)|^2}$，并设与特征方向 $\tau=\tau(x,t)$ 相伴的算子为 $c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{b}\cdot\nabla u$，其中

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{c(x,t)}{\psi(x,t)}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{b}(x,t)}{\psi(x,t)}\cdot\nabla. \tag{2}$$

于是，方程 (1) 可以改写为特征形式

$$\begin{cases}\psi(x,t)\frac{\partial u}{\partial\tau}-\nabla\cdot\big(a(u)\nabla u\big)=f(u), & (x,t)\in\Omega\times J,\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times J,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\end{cases} \tag{3}$$

并给出 (3) 的特征混合弱形式解 $(u,\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Phi})\in W\times V\times V$ 满足

$$\begin{cases}\Big(\psi\frac{\partial u}{\partial\tau},w\Big)+(\nabla\cdot\mathbf{\Phi},w)=\big(f(u),w\big), & w\in W,\\ (\mathbf{\Gamma},\mathbf{v})=(u,\nabla\cdot\mathbf{v}), & \mathbf{v}\in V,\\ (\mathbf{\Phi},\mathbf{v})=\big(a(u)\mathbf{\Gamma},\mathbf{v}\big), & \mathbf{v}\in V,\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{\Gamma}=-\nabla u,\quad \mathbf{\Phi}=a(u)\mathbf{\Gamma}. \tag{5}$$

取时间步长 Δt 并在时刻 $t^n=n\Delta t$，$n=0,1,\cdots,N$，$\Delta t=T/N$ 求解 (4)。在时刻 $t=t^n$ 的特征导数通过以下方式离散

$$\begin{aligned}\Big(\psi\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^n &\approx \psi(x,t^n)\frac{u(x,t^n)-u(\bar{x},t^{n-1})}{\sqrt{(x-\bar{x})^2+(\Delta t)^2}}\\ &= c(x,t^n)\frac{u(x,t^n)-u(\bar{x},t^{n-1})}{\Delta t}=c^n\frac{u^n-\bar{u}^{n-1}}{\Delta t},\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\bar{x}=x-\frac{\mathbf{b}(x,t^{n-1})}{c(x,t^{n-1})}\Delta t.$$

这里可能会出现$\bar{x}\bar{\in}\Omega$的情形，此时可做如下延拓，记$F:\mathbf{R}^2\to\partial\Omega$是$x$到$\partial\Omega$的投影算子，$\bar{y}$是$\bar{x}$关于$F(\bar{x})$的对称点。令

$$\bar{f}^{n-1}(x)=\begin{cases} f^{n-1}(\bar{x}), & \bar{x}\in\Omega,\\ 2f^{n-1}\big(F(\bar{x})\big)-f^{n-1}(\bar{y}), & \bar{x}\bar{\in}\Omega. \end{cases}$$

对于$x\in\Omega$，若$\bar{x}\bar{\in}\Omega$，当Δt充分小时，总有$\bar{y}\in\Omega$，所以该延拓总是有意义的。

对区域Ω进行直径为h的拟一致多边形剖分得到有限维空间$W_h\subset W$和$V_h\subset V$，记这样的剖分结果为$\triangle_h$并称为细网格。这样就可以将(4)的时间离散特征混合有限元解定义为：对于$n=0,1,\cdots,N$，求解$(u_h^n,\mathbf{\Gamma}_h^n,\Phi_h^n)\in(W_h,V_h,V_h)$使得

$$\begin{cases} \left(c^n\frac{u_h^n-\bar{u}_h^{n-1}}{\Delta t},w_h\right)+(\nabla\cdot\Phi_h^n,w_h)=\big(f(u_h^n),w_h\big), & w_h\in W_h,\\ (\mathbf{\Gamma}_h^n,\mathbf{v}_h)=(u_h^n,\nabla\cdot\mathbf{v}_h), & \mathbf{v}_h\in V_h,\\ (\Phi_h^n,\mathbf{v}_h)=\big(a(u_h^n)\mathbf{\Gamma}_h^n,\mathbf{v}_h^n\big), & \mathbf{v}_h\in V_h, \end{cases}\tag{7}$$

其中$u_h^n=u_h(x,t^n)$，$\bar{u}_h^{n-1}=u_h(\bar{x},t^{n-1})$。

为了加快非线性问题(7)的收敛速度，这里采用两重网格算法求解。首先采用非线性迭代求出粗网格$\triangle_H\subset\triangle_h$上的特征混合有限元解$u_H^n$，$\mathbf{\Gamma}_H^n$及$\Phi_H^n$，然后再求解一个线性系统的解$(\tilde{u}_h^n,\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n,\tilde{\Phi}_h^n)\in(W_h,V_h,V_h)$满足

$$\begin{cases} \left(c^n\frac{\tilde{u}_h^n-\bar{\tilde{u}}_h^{n-1}}{\Delta t},w_h\right)+(\nabla\cdot\tilde{\Phi}_h^n,w_h)=\big(f(u_H^n)+f'(u_H^n)(\tilde{u}_h^n-u_H^n),w_h\big), & w_h\in W_h,\\ (\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n,\mathbf{v}_h)=(\tilde{u}_h^n,\nabla\cdot\mathbf{v}_h), & \mathbf{v}_h\in V_h,\\ (\tilde{\Phi}_h^n,\mathbf{v}_h)=\big(a(u_H^n)\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n,\mathbf{v}_h^n\big)+\big(a'(u_H^n)\mathbf{\Gamma}_H^n(\tilde{u}_h^n-u_H^n),\mathbf{v}_h^n\big), & \mathbf{v}_h\in V_h, \end{cases}\tag{8}$$

其中$h<<H$。

两重网格算法只是将类似于牛顿的迭代法限定在粗网格上，然后在需要求解的细网格上只求解线性化后的问题(8)即可，可以起到很好加速收敛作用。

3 两重网格算法的误差分析

在进行两重网格算法的收敛性分析时，首先引进离散空间和投影算子，然后讨论(7)的解的收敛性，再利用(7)的结论分析(8)的收敛性。

对(7)的特征混合有限元解进行误差分析，需要用到Raviart-Thomas空间的如下假设

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_h\in W_h,\quad \mathbf{v}_h\in V_h.\tag{9}$$

在每个时间层n上，对于属于$L^2(\Omega)$的函数$\phi^n=\phi(\cdot,t^n)$，引入范数

$$\|\phi\|_{l^2}:=\Big(\sum_{n=1}^{N}\triangle t\|\phi^n\|^2\Big)^{1/2}.\tag{10}$$

利用L^2范数定义空间W_h和V_h的投影$(\hat{u}_h^n,\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n)\in W_h\times V_h$如下

$$(u^n,w_h)=(\hat{u}_h^n,w_h),\quad w_h\in W_h,\tag{11}$$

$$(\mathbf{\Gamma}^n,\mathbf{v}_h)=(\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n,\mathbf{v}_h),\quad \mathbf{v}_h\in V_h.\tag{12}$$

同时还需要定义投影 $\Pi_h:(H^1(\Omega))^2\to V_h$，满足

$$(\nabla\cdot\mathbf{\Phi}^n,w^n)=\big(\nabla\cdot(\Pi_h\mathbf{\Phi}^n),w_h\big),\quad w_h\in W_h. \tag{13}$$

而且，投影还满足唯一性

$$(u^n,\nabla\cdot\mathbf{v}_h)=(\hat{u}_h^n,\nabla\cdot\mathbf{v}_h),\quad \forall\, v_h\in V_h. \tag{14}$$

再设有限元空间 W_h 和 V_h 具有如下插值特性：对于 $u\in H^r(\Omega)$ 及 $\mathbf{v}\in H^r(\Omega)\times H^r(\Omega)$，

$$\|\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\|\le C\|\mathbf{v}\|_r h^r,\quad 1\le r\le k+1, \tag{15}$$

$$\|u-\hat{u}_h\|\le C\|u\|_r h^r,\quad \|u-\hat{u}_h\|_\infty\le C\|u\|_{r,\infty}h^r,\quad 1\le r\le k+1, \tag{16}$$

$$\|\mathbf{\Gamma}-\hat{\mathbf{\Gamma}}_h\|\le C\|\mathbf{\Gamma}\|_r h^r,\quad \|\mathbf{\Gamma}-\hat{\mathbf{\Gamma}}_h\|_\infty\le C\|\mathbf{\Gamma}\|_{r,\infty}h^r,\quad 1\le r\le k+1, \tag{17}$$

其中 k 与 W_h 及 V_h 的多项式的次数有关。这些假设对于 Raviart-Thomas 空间总是成立的。为分析方便我们还假设问题 (1) 的解是充分光滑的而且可以达到 $k+1$ 阶光滑性。

对于空间 V_h 和 W_h，当 $\mathbf{v}_h\in V_h$，$u_h\in W_h$ 时具有逆估计

$$\|\mathbf{v}_h\|_\infty\le\|\mathbf{v}_h\|h^{-1},\quad \|u_h\|_\infty\le\|u_h\|h^{-1}. \tag{18}$$

当 $p=2$，∞ 及 $1\le r\le k+1(k\ge 1)$ 时，根据标准有限元的误差估计还有[17]

$$\|u-\hat{u}_h\|_{L^p(0,T;L^2)}+h\|u-\hat{u}_h\|_{L^p(0,T;H^1)}\le Ch^r\|u\|_{L^p(0,T;H^r)}. \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{\partial(u-\hat{u}_h)}{\partial t}\Big\|_{L^p(0,T;L^2)}+h\Big\|\frac{\partial(u-\hat{u}_h)}{\partial t}\Big\|_{L^p(0,T;H^1)}\\ \le\ & Ch^r\Big(\|u\|_{L^p(0,T,H^r)}+\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{L^p(0,T;H^r)}\Big).\end{aligned} \tag{20}$$

3.1 混合特征有限元的误差分析

引理 3.1[18] 设 $q\in L^\infty(0,T;L^2)$，则有

$$\|\bar{q}^{n-1}\|^2\le(1+K\triangle t)\|q^{n-1}\|^2,$$

其中 K 为非负常数，

$$\bar{q}=q(\bar{x})=q\Big(x-\frac{b(x,t^{n-1})}{c(x,t^{n-1})}\triangle t\Big).$$

在时刻 $t=t^n$，用 (4) 减去 (7) 得到

$$\begin{cases}\Big(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial\tau}-\frac{u_h^n-\bar{u}_h^{n-1}}{\triangle t},w_h\Big)\\ \quad+(\nabla\cdot\Phi^n-\nabla\cdot\Phi_h^n,w_h)=(f(u^n)-f(u_h^n),w_h), & w_h\in W_h,\\ (\mathbf{\Gamma}^n-\mathbf{\Gamma}_h^n,\mathbf{v}_h)=(u^n-u_h^n,\nabla\cdot\mathbf{v}_h), & \mathbf{v}_h\in V_h,\\ (\Phi^n-\Phi_h^n,\mathbf{v}_h)=\big(a(u^n)\mathbf{\Gamma}^n-a(u_h^n)\mathbf{\Gamma}_h^n,\mathbf{v}_h^n\big), & \mathbf{v}_h\in V_h.\end{cases} \tag{21}$$

令 $\eta^n = u^n - \hat{u}_h^n$, $\mu^n = u_h^n - \hat{u}_h^n$, $\zeta^n = \mathbf{\Gamma}_h^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n$ 及 $\chi^n = \Phi_h^n - \Pi_h\Phi^n$，通过 (12)-(14) 得到

$$\begin{cases} \left(c^n \frac{\mu^n - \bar{\mu}^{n-1}}{\Delta t}, w_h\right) + (\nabla\cdot\chi^n, w_h) = \left(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial\tau} - c^n\frac{u^n - \bar{u}^{n-1}}{\Delta t}, w_h\right) & \\ \quad +\left(c^n\frac{\eta^n - \bar{\eta}^{n-1}}{\Delta t}, w_h\right) + \left(f(u^n) - f(u_h^n), w_h\right), & w_h \in W_h, \\ (\zeta^n, \mathbf{v}_h) = (\mu^n, \nabla\cdot\mathbf{v}_h), & \mathbf{v}_h \in V_h, \\ (\chi^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{\Phi}^n - \Pi_h\mathbf{\Phi}^n, \mathbf{v}_h) - \left(a(u^n)\mathbf{\Gamma}^n - a(u_h^n)\mathbf{\Gamma}_h^n, \mathbf{v}_h\right), & \mathbf{v}_h \in V_h. \end{cases} \tag{22}$$

在任一点 $x\in\Omega$，由中值定理可知存在一点 α^n 使得 $f(u^n) - f(u_h^n) = f'(\alpha^n)(u^n - u_h^n)$，因此

$$f(u^n) - f(u_h^n) = f'(\alpha^n)\eta^n - f'(\alpha^n)\mu^n. \tag{23}$$

同理存在 $\beta^n(x)$ 使得

$$a(u^n)\mathbf{\Gamma}^n - a(u_h^n)\mathbf{\Gamma}_h^n = a'(\beta^n)\eta^n\mathbf{\Gamma}^n - a'(\beta^n)\mu^n\mathbf{\Gamma}^n + a(u_h^n)(\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n) - a(u_h^n)\zeta^n. \tag{24}$$

在 (22) 中，令 $w_h = \mu^n$, $\mathbf{v}_h = \chi^n$, $\mathbf{v}_h = \zeta^n$ 并结合 (23), (24)，得到

$$\begin{aligned} &\left(c^n\frac{\mu^n - \bar{\mu}^{n-1}}{\Delta t}, \mu^n\right) + \left(a(u_h^n)\zeta^n, \zeta^n\right) \\ =\ &\left(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial\tau} - c^n\frac{u^n - \bar{u}^{n-1}}{\Delta t}, \mu^n\right) + \left(c^n\frac{\eta^n - \bar{\eta}^{n-1}}{\Delta t}, \mu^n\right) \\ &+\left(f'(\alpha^n)\eta^n - f'(\alpha^n)\mu^n, \mu^n\right) + (\Pi_h\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^n, \zeta^n) + \left(a'(\beta^n)\eta^n\mathbf{\Gamma}^n, \zeta^n\right) \\ &-\left(a'(\beta^n)\mu^n\mathbf{\Gamma}^n, \zeta^n\right) + \left(a(u_h^n)(\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n), \zeta^n\right) \equiv \sum_{i=1}^{7} T_i. \end{aligned} \tag{25}$$

关于 (25) 的左端，由引理 3.1 有

$$\begin{aligned} &\left(c^n\frac{\mu^n - \bar{\mu}^{n-1}}{\Delta t}, \mu^n\right) + \left(a(u_h^n)\zeta^n, \zeta^n\right) \\ \geq\ &\frac{c_*}{2\Delta t}(\|\mu^n\|^2 - \|\mu^{n-1}\|^2) - \frac{c^*K}{2}\|\mu^{n-1}\|^2 + a_*\|\zeta^n\|^2. \end{aligned} \tag{26}$$

利用 [14] 中的结论及引理 3.1 可以估计右端项 T_1、T_2 如下

$$|T_1| = \left|\left(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial\tau} - c^n\frac{u^n - \bar{u}^{n-1}}{\Delta t}, \mu^n\right)\right| \leq C\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right\|^2_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2)}\Delta t + \|\mu^n\|^2. \tag{27}$$

$$|T_2| = \left|\left(c^n\frac{\eta^n - \bar{\eta}^{n-1}}{\Delta t}, \mu^n\right)\right| \leq \frac{C}{2\Delta t}(\|\eta^n\|^2 + \|\eta^{n-1}\|^2) + \frac{CK}{2}\|\eta^{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mu^n\|^2. \tag{28}$$

由条件 (a)-(c) 及 Holder 和 Young 不等式可以给出 $T_3 - T_7$ 的估计如下

$$|T_3| \leq C\left(\|\mu^n\|^2 + \|\eta^n\|^2\right), \tag{29}$$

$$|T_4| \leq C\|\Phi^n - \Pi_h\Phi^n\|^2 + \varepsilon\|\zeta^n\|^2, \tag{30}$$

$$|T_5| \leq \tilde{C}\|\mathbf{\Gamma}^n\|^2_\infty\|\eta^n\|^2 + \varepsilon\|\zeta^n\|^2 \leq C\|\eta^n\|^2 + \varepsilon\|\zeta^n\|^2, \tag{31}$$

$$|T_6| \leq \tilde{C}\|\mathbf{\Gamma}^n\|^2_\infty\|\mu^n\|^2 + \varepsilon\|\zeta^n\|^2 \leq C\|\mu^n\|^2 + \varepsilon\|\zeta^n\|^2, \tag{32}$$

$$|T_7| \leq C\|\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|^2 + \varepsilon\|\zeta^n\|^2. \tag{33}$$

将 (26)-(33) 代入 (25)，令 $\varepsilon \le a_*/8$，$\tilde{C}=\min(c_*, a_*)$，用 $2\Delta t$ 乘以两端并将 n 由 1 加到 $m(m \le N)$，再注意到 $\mu^0 = 0$，推得

$$
\begin{aligned}
&\|\mu^m\|^2 + \sum_{n=1}^{m} (\Delta t\|\zeta^n\|^2) \\
\le\ & C\Big(\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\Big\|^2_{L^2(0,T;L^2)}(\Delta t)^2 + \sum_{n=1}^{m}\|\eta^n\|^2 + \sum_{n=1}^{m}\|\mu^n\|^2\Delta t + \sum_{n=1}^{m}\|\eta^n\|^2\Delta t \\
&+ \sum_{n=1}^{m}\|\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|^2\Delta t + \sum_{n=1}^{m}\|\mathbf{\Phi}^n - \Pi_h\mathbf{\Phi}^n\|^2\Delta t\Big).
\end{aligned} \tag{34}
$$

引用离散的 Gronwall 引理，再由 (15)-(17) 及上式得到

$$
\|\mu^m\| + \Big(\sum_{n=1}^{m}\Delta t\|\zeta^n\|^2\Big)^{1/2} \le C\big(\Delta t + \Delta t^{-1}h^{k+1} + h^{k+1}\big). \tag{35}
$$

当 $h = O(\Delta t)$ 时，利用三角不等式 $\|u^n - u_h^n\| \le \|\eta^n\| + \|\mu^n\|$ 及 $\|\mathbf{\Gamma}^n - \mathbf{\Gamma}_h^n\| \le \|\zeta^n\| + \|\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|$，结合 (15)、(16)、(18) 得到

$$
\begin{aligned}
&\|u^m - u_h^m\| + \Big(\sum_{n=1}^{m}\Delta t\|\mathbf{\Gamma}^n - \mathbf{\Gamma}_h^n\|^2\Big)^{1/2} \\
\le\ & \|\mu^m\| + \Big(\sum_{n=1}^{m}\Delta t\|\zeta^n\|^2\Big)^{1/2} + \|\eta^N\| + \Big(\sum_{n=1}^{m}\Delta t\|\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|^2\Big)^{1/2} \\
\le\ & C(\Delta t + h^k).
\end{aligned} \tag{36}
$$

这样便得到如下定理。

定理 3.1　如果条件 (a)-(c) 成立，且 $h = O(\Delta t)$，则对于由 (7) 定义的 $(u_h^n, \mathbf{\Gamma}_h^n, \mathbf{\Phi}_h^n) \in W_h \times V_h \times V_h$，必存在与 h、Δt 无关的 C，使得

$$
\|u^m - u_h^m\| + \|\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}_h\|_{l^2} \le C(\Delta t + h^k), \tag{37}
$$

其中 $1 \le m \le N$, $k \ge 1$。

3.2　混合特征有限元两重网格算法的误差分析

下面分析两重网格算法的收敛性，这个方法分两步进行：

第一步，在粗网格 Δ_H 上，求解如下非线性问题解得 $(u_H^n, \mathbf{\Gamma}_H^n, \Phi_H^n) \in (W_H, V_H, V_H)$

$$
\begin{cases}
\Big(c^n\frac{u_H^n - \bar{u}_H^{n-1}}{\Delta t}, w_H\Big) + (\nabla\cdot\Phi_H^n, w_H) = \big(f(u_H^n), w_H\big), & w_H \in W_H, \\
(\mathbf{\Gamma}_H^n, \mathbf{v}_H) = (u_H^n, \nabla\cdot\mathbf{v}_H), & \mathbf{v}_H \in V_H, \\
(\Phi_H^n, \mathbf{v}_H) = (a(u_H^n)\mathbf{\Gamma}_H^n, \mathbf{v}_H), & \mathbf{v}_H \in V_H.
\end{cases} \tag{38}
$$

第二步，在细网格 Δ_h 上，求解线性系统 (8) 得到两重网格解 $(\tilde{u}_h^n, \tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n, \tilde{\Phi}_h^n) \in (W_h, V_h, V_h)$。

定理 3.2　如果条件 (a)-(c) 成立，且 $h = O(\Delta t)$，则对于由 (8) 定义的 $(\tilde{u}_h^n, \tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n, \tilde{\mathbf{\Phi}}_h^n) \in W_h \times V_h \times V_h$，必存在与 h 和 Δt 无关的 C，使得

$$
\|u^M - \tilde{u}_h^M\| + \|\mathbf{\Gamma} - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_h\| \le C(\Delta t + h^k + H^{2k-1}), \tag{39}
$$

其中$k \geq 1$，$M \leq N$。

证明 令

$$\xi^n = \tilde{u}_h^n - \hat{u}_h^n, \quad \gamma^n = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n, \quad \theta^n = \tilde{\mathbf{\Phi}}_h^n - \Pi_h \mathbf{\Phi}^n.$$

在$t = t^n$处，以(4)减去(8)，并令$w_h = \xi^n$，$\mathbf{v}_h = \theta^n$，$\mathbf{v}_h = \gamma^n$得到

$$\begin{cases} \left(c^n \frac{\xi^n - \bar{\xi}^{n-1}}{\triangle t}, \xi^n\right) + (\nabla \cdot \theta^n, \xi^n) = \left(\psi^n \frac{\partial u^n}{\partial \tau} - c^n \frac{u^n - \bar{u}^{n-1}}{\triangle t}, \xi^n\right) \\ \quad + \left(c^n \frac{\eta^n - \bar{\eta}^{n-1}}{\triangle t}, \xi^n\right) + (f(u^n) - f(u_H^n) - f'(u_H^n)(\tilde{u}_h^n - u_H^n), \xi^n), \\ (\gamma^n, \theta^n) = (\xi^n, \nabla \cdot \theta^n), \\ (\theta^n, \gamma^n) = (\Phi^n - \Pi_h \Phi^n, \gamma^n) - \left(a(u^n)\mathbf{\Gamma}^n - a(u_H^n)\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n - a'(u_H^n)\mathbf{\Gamma}_H^n(\tilde{u}_h^n - u_H^n), \gamma^n\right). \end{cases} \tag{40}$$

由假设(a)-(c)及Taylor展式可知存在α_1^n，使得

$$\begin{aligned} & f(u^n) - f(u_H^n) - f'(u_H^n)(\tilde{u}_h^n - u_H^n) \\ = \ & f'(u_H^n)\eta^n - f'(u_H^n)\xi^n + \frac{1}{2} f''(\alpha_1^n)(u^n - u_H^n)^2. \end{aligned} \tag{41}$$

同理，由Taylor展示得到

$$a(u^n) = a(u_H^n) + a'(u_H^n)(u^n - u_H^n) + \frac{a''(\beta_1^n)}{2!}(u^n - u_H^n)^2. \tag{42}$$

于是

$$\begin{aligned} & a(u^n)\mathbf{\Gamma}^n - a(u_H^n)\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n - a'(u_H^n)\mathbf{\Gamma}_H^n(\tilde{u}_h^n - u_H^n) \\ = \ & a(u^n)(\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n) + a(u_H^n)(\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n) + a'(u_H^n)(\eta^n - \xi^n)(\mathbf{\Gamma}_H^n - \mathbf{\Gamma}^n + \mathbf{\Gamma}^n) \\ & + a'(u_H^n)\left[(u^n - u_H^n)(\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n - \mathbf{\Gamma}_H^n) + \frac{a''(\beta_1^n)}{2!}(u^n - u_H^n)^2\right]\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n. \end{aligned} \tag{43}$$

将(41)、(43)代入(40)得到

$$\begin{aligned} & \left(c\frac{\xi^n - \bar{\xi}^{n-1}}{\triangle t}, \xi^n\right) + \left(a(u_H^n)\gamma^n, \gamma^n\right) \\ = \ & \left(\psi^n \frac{\partial u^n}{\partial \tau} - c^n e \frac{u^n - \bar{u}^{n-1}}{\triangle t}, \xi^n\right) + \left(c\frac{\eta^n - \bar{\eta}^{n-1}}{\triangle t}, \xi^n\right) + \left(f'(u_H^n)(\eta^n - \xi^n), \xi^n\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(f''(\beta_1^n)(u^n - u_H^n)^2, \xi^n\right) + \left(\Pi_h \mathbf{\Phi}^n - \mathbf{\Phi}^n, \gamma^n\right) + \left(a(u^n)(\mathbf{\Gamma}^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n), \gamma^n\right) \\ & + \left(a'(u_H^n)\eta^n(\mathbf{\Gamma}_H^n - \mathbf{\Gamma}^n), \gamma^n\right) + \left(a'(u_H^n)\eta^n\mathbf{\Gamma}^n, \gamma^n\right) - \left(a'(u_H^n)\xi^n(\mathbf{\Gamma}_H^n - \hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n), \gamma^n\right) \\ & - \left(a'(u_H^n)\xi^n(\hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n - \mathbf{\Gamma}^n), \gamma^n\right) - \left(a'(u_H^n)\xi^n\mathbf{\Gamma}^n, \gamma^n\right) + \left(a'(u_H^n)(u^n - u_H^n)(\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n - \mathbf{\Gamma}_H^n), \gamma^n\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(a''(\beta_1^n)(u^n - u_H^n)^2\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n, \gamma^n\right) \equiv \sum_{i=1}^{13} T_i'. \end{aligned} \tag{44}$$

左端项估计同 (26) 得到

$$\Big(c^n\frac{\xi^n-\bar{\xi}^{n-1}}{\Delta t},\xi^n\Big)+\big(a(u_H^n)\gamma^n,\gamma^n\big)$$
$$\geq \frac{c_*}{2\Delta t}\big(\|\xi^n\|^2-\|\xi^{n-1}\|^2\big)-\frac{c^*K}{2}\|\xi^{n-1}\|^2+a_*\|\gamma^n\|^2, \tag{45}$$

$T_1'-T_2'$ 的估计同 (27)-(28)

$$|T_1'|\leq C\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;L^2)}\Delta t+\|\mu^n\|^2 \tag{46}$$

$$|T_2'|\leq \frac{C}{2\Delta t}\big(\|\eta^n\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2\big)+\frac{CK}{2}\|\eta^{n-1}\|^2+\frac{1}{2}\|\mu^n\|^2. \tag{47}$$

其余项的估计如下

$$|T_3'|\leq C\big(\|\eta^n\|^2+\|\xi^n\|^2\big). \tag{48}$$

取 (37) 中的 $h=H$, $m=n$，并由 (15)-(18) 得到

$$|T_4'|\leq C\|(u^n-u_H^n)^2\|^2+\|\xi^n\|^2\leq CH^{-2}(H^k+\Delta t)^4+\|\xi^n\|^2, \tag{49}$$

$$|T_5'|\leq C\|\Phi^n-\Pi_h\Phi^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2, \tag{50}$$

$$|T_6'|\leq C\|\mathbf{\Gamma}^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2, \tag{51}$$

$$|T_7'|\leq C\|\eta^n\|_\infty^2\|\mathbf{\Gamma}^n-\mathbf{\Gamma}_H^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2\leq Ch^{2(k+1)}\|\mathbf{\Gamma}^n-\mathbf{\Gamma}_H^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2, \tag{52}$$

$$|T_8'|\leq C\|\mathbf{\Gamma}^n\|_\infty^2\|\eta^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2\leq C\|\eta^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2. \tag{53}$$

设 $\xi^{\hat{N}}$ 是 $\|\xi^n\|$, $n=1,2,\cdots,N$ 中取值最大的一个，于是由 (19) 及 Holder 不等式得到

$$|T_9'|\leq C\|\mathbf{\Gamma}_H^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n\|_\infty\|\xi^n\|\|\gamma^n\|\leq C\|\xi^{\hat{N}}\|\|\gamma^n\|\|\mathbf{\Gamma}_H^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n\|H^{-1}. \tag{54}$$

再由 (18) 得

$$|T_{10}'|\leq C\|\xi^n\|^2\|\mathbf{\Gamma}^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n\|_\infty^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2\leq C\|\xi^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2, \tag{55}$$

$$|T_{11}'|\leq C\|\mathbf{\Gamma}^n\|_\infty^2\|\xi^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2\leq C\|\xi^n\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2, \tag{56}$$

$$|T_{12}'|\leq C\big\|(u^n-u_H^n)(\mathbf{\Gamma}_H^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n)\big\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2$$
$$\leq CH^{-2}(H^k+\Delta t)^2\big(\|\mathbf{\Gamma}_H^n-\mathbf{\Gamma}^n\|^2+h^{2(k+1)}\big)+\varepsilon\|\gamma^n\|^2, \tag{57}$$

$$|T_{13}'|\leq C\big\|(u^n-u_H^n)^2\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\big\|^2+\varepsilon\|\gamma^n\|^2\leq CH^{-2}(H^k+\Delta t)^4+\varepsilon\|\gamma^n\|^2. \tag{58}$$

将 (45)-(58) 代入 (44)，取适当的 ε，得用 $2\Delta t$ 乘以两端并将 n 由 1 加到 $M\leq N$，再注意

到 $\xi^0=0$，有

$$
\begin{aligned}
&\|\xi^M\|^2+\sum_{n=1}^{M}(\Delta t\|\gamma^n\|^2)\\
\le\ & C\Big\{\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L^2(0,T;L^2)}(\Delta t)^2+\sum_{n=1}^{M}\|\eta^n\|^2+\sum_{n=1}^{M}\|\xi^n\|^2\Delta t+\sum_{n=1}^{M}\|\eta^n\|^2\Delta t\\
&+\sum_{n=1}^{M}\|\mathbf{\Gamma}^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|^2\Delta t+\sum_{n=1}^{M}\|\mathbf{\Phi}^n-\Pi_h\mathbf{\Phi}^n\|^2\Delta t+H^{-2}(H^r+\Delta t)^4\\
&+h^{2(k+1)}\sum_{n=1}^{M}\Delta t\|\mathbf{\Gamma}^n-\mathbf{\Gamma}_H^n\|^2+H^{-1}\|\xi^{\hat{M}}\|\sum_{n=1}^{M}\Delta t\|\gamma^n\|\|\mathbf{\Gamma}_H^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_H^n\|\\
&+H^{-2}(H^r+\Delta t)^2\Big(\sum_{n=1}^{M}\Delta t\|\mathbf{\Gamma}_H^n-\mathbf{\Gamma}^n\|^2+h^{2(k+1)}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

对 (59) 中右端最后三项再做估计，得到

$$
\begin{aligned}
&\|\xi^M\|^2+\sum_{n=1}^{M}(\Delta t\|\gamma^n\|^2)\\
\le\ & C\sum_{n=1}^{M}\|\xi^n\|^2\Delta t+12\|\xi^{\hat{N}}\|^2+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{M}(\Delta t\|\gamma^n\|^2)\\
&+C\Big\{\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L^2(0,T;L^2)}(\Delta t)^2+\sum_{n=1}^{M}\|\eta^n\|^2+\sum_{n=1}^{M}\|\eta^n\|^2\Delta t\\
&+\sum_{n=1}^{M}\|\mathbf{\Gamma}^n-\hat{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|^2\Delta t+\sum_{n=1}^{M}\|\Phi^n-\Pi_h\Phi^n\|^2\Delta t+H^{-2}(H^k+\Delta t)^4\Big\}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

在上式中，令 $M=\tilde{N}$，应用离散的 Gronwall 不等式 (15)-(17) 可以推得

$$\|\xi^{\hat{N}}\|\le C(\Delta t+h^k+H^{2k-1}),$$

代入上式，再次应用 Gronwall 不等式得到

$$\|\xi^M\|+\Big(\sum_{n=1}^{M}\Delta t\|\gamma^n\|^2\Big)^{1/2}\le C(\Delta t+h^k+H^{2k-1}). \tag{61}$$

由关系式

$$\|u^n-\tilde{u}_h^n\|\le\|\eta^n\|+\|\xi^n\|,\quad \|\mathbf{\Gamma}^n-\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|\le\|\gamma^n\|+\|\mathbf{\Gamma}^n-\tilde{\mathbf{\Gamma}}_h^n\|$$

及 (15), (16) 即可得到定理的结论。

定理 3.1 和定理 3.2 说明了两重网格算法一个明显的事实：为了求解细网格 Δ_h 上的混合有限元解，可以采用两重网格算法，选取粗细网格的步长满足关系式 $h^k=O(H^{2k-1})$，两重网格算法的解与原非线性迭代算法的解保持同样的计算精度。但是，由于两重网格算法只在粗网格上进行非线性迭代运算，在需要求解的细网格上只进行一次线性运算，这样就保证了计算次数的减少、计算效率的提高。下面的算例将进一步验证这点。

4　数值算例

考虑非线性对流扩散方程的模型问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla u - \nabla\cdot(a\nabla u) = f(u), & (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,T], \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & (\mathbf{x},t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega, \end{cases} \tag{62}$$

其中 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$, $\mathbf{x}=(x,y)^T$, $f(u)=-u^2+G(x,y,t)$, $G(x,y,t)$ 由 (62) 的精确解 $u(\mathbf{x},t)=txy(1-x)(1-y)\mathrm{e}^{x+y}$ 唯一确定。取 $a=0.001$, $b=(1,1)^T$，则 (62) 是一个对流占优的扩散方程。

选取时间步长 $\Delta t=1.25\times10^{-6}$，计算 20 层。按照定理 3.2 的结论，当选取粗细网格直径比为 $h^k=O(H^{2k-1})$ 时，由定理 3.1 可知特征混合有限元 (非线性迭代) 算法 (7) 的解和特征混合有限元两重网格算法 (38)、(8) 的解具有相同的计算精度。为了保证起到加速收敛的目的，有限元空间多项式的次数 k 至少需要取 2，在这里我们就取 $k=2$ 进行计算，这时的粗细网格比为 $h=O(H^{3/2})$。

采用算法 (7) 计算方程的特征混合有限元解，需要对区域 Ω 进行细网格剖分，在这里进行 Ω 矩形单元划分，如果取细网格步长 $h=1/32$，得到细网格 Δ_h，需要计算 $32\times32=1024$ 个点的近似值 u_h，求解时要用到非线性迭代。

如果采用本文的两重网格算法，则按照关系式 $h=O(H^{3/2})$，先对 Ω 做步长为 $H=h^{3/2}\approx1/10$ 矩形单元剖分，得到粗网格 Δ_H，用非线性迭代格式 (38) 计算出粗网格解 u_H。然后再在细网格 Δ_h 求解线性问题 (8) 得到两重网格解 $\hat{u_h}$，并使 $u_h\approx\hat{u_h}$。表 1 和表 2 分别给出了非线性迭代解和两重网格解算法的计算时间和计算误差。

表 1: 两重网格解 $\hat{u}_h$ 的 L^2 误差

H	h	$\frac{\|u-\hat{u}_h\|}{\|u\|}$	CPU time
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{16}$	44.0×10^{-3}	10.6”
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{32}$	5.20×10^{-3}	165.9”

表 2: 非线性迭代解 u_h 的 L^2 误差

h	$\frac{\|u-u_h\|}{\|u\|}$	CPU time
$\frac{1}{16}$	4.40×10^{-3}	12.1”
$\frac{1}{32}$	2.50×10^{-3}	230.0”

由表 1、2 可以看出，两重网格算法在提高计算效率方面非常显著，计算时间只占原算法计算时间的三分之二，而且两重网格解与原算法解保持同样计算精度，因此用两重网格解作为问题 (62) 的近似解，在不影响精度的情况下，有效的提高了计算效率。

两重网格算法为求解非线性方程 (包括非线性对流扩散方程) 提供了提高计算效率的途径。其关键所在就是只在粗网格上进行非线性迭代，这样的计算结果并不影响最终解的精度。两重网格算法与特征有限元法的结合不仅消除了数值振荡现象，还提高了非线性对流扩散问题的计算效率，是一种值得推广的稳定、高效算法。

参考文献：

[1] Bear J. Dynamics of Fluid in Porous Media[M]. New York: Dover, 1972

[2] Peaceman D W. Fundamentals of Reservoir Simulation[M]. New York: Elsevier, 1977

[3] Van Duijn C J, Knabner P. Solute transport in porous media with equilibrium and non-equilibrium multiplesite adsorption: traveling waves[J]. J Reine Ang Math, 1991, 415: 1-49

[4] Fetter C. Contaminant Hydrogeology[M]. New York: Macmillan, 1993
[5] Helmig R. Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface—A Contribution to the Modeling of Hydrosystems[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1997
[6] Friedman A. Variational Principles and Free-Boundary Problems[M]. New York: John Wiley and Sons, 1982
[7] Johnson C. Numerical Solution of Partial Diffusion Equation by the Finite Element Method[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
[8] Douglas J, J R, Russel T F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(5): 871-885
[9] Hellan K. Analysis of elastic plates in flexure by a simplified finite element method[J]. Acta Polytechnica Scandinavia Civil Engineering Series Trondheim, 1967, 46
[10] Herrmann L R. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations[M]. New York: John Wiley and Sons, 1967
[11] Raviart R, Thomas J. A mixed finite element method for second order elliptic problems[C]// Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer, 1977, 606: 292-315
[12] Nedelec J C. Mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$[J]. Numer Math, 1980, 35: 315-341
[13] Xu J. A novel two-grid method for semilinear elliptic equations[J], SIAM J Sci Comput, 1994, 15: 231-237
[14] Dawson C N, Wheeler M F. Two-grid methods for mixed finite element approximations of nonlinear parabolic equations[J]. Contemp Math, 1994, 180: 191-203
[15] Qin X Q, Ma Y C. Two-grid method for characteristic finite-element solutionss of 2D nonlinear convection diffusion problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(11): 1506-1514
[16] Ren C F, Ma Y C. Residual a posteriori error estimate of a new two-level method for steady Navier-Stokes equations[J]. Jrl Syst Sci & Complexity, 2006, 26: 478-490
[17] Russell T F. Time stepping along characteristics with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media[J]. SIAM J Numer Anal, 1985, 22(5): 970-1013
[18] Douglas J, J R, Russel T F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAMJ Numer Anal, 1982, 19(5): 871-885

Two-grid Method for the Characteristic Mixed Finite Element Approximations of 2D Nonlinear Convection Diffusion Problems

QIN Xin-qiang[1], DANG Fa-ning[2], GONG Chun-qiong[1], ZHANG Ai-jun[1]

(1- School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048; 2- College of Water Resources and Hydro-electric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

Abstract: A two-grid method for numerically solving the nonlinear convection-dominated diffusion problems is presented. This method includes two steps. First, a nonlinear problem is solved on a coarse grid, and then a linear problem generated by the coarse grid solutions is solved on a fine grid. The theoretical analysis and numerical example show that the new method is numerical stable and efficient.
Keywords: convection-diffusion equations; characteristic mixed finite element; two-grid method; convergence